مدرس: دکتر علیرضا امامی (هیئت علمی دانشگاه آزاد-واحد اصفهان)

ارتعاش آزاد سیستم های چند درجه آزادی - فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی

برای سیستم هایی که فاقد میرایی هستند $[C]=[0]$ و :

$$[m]\{\ddot{u}\}+[k]\{u\}=\{0\} \qquad (10.1.1)$$

دراین مسئله شرایط اولیه به صورت بردارهای جابجایی و سرعت درلحظه $t=0$ نوشته می شود.

$$\text{at}\quad t=0\ ,\quad \{u\}=\{u(0)\}\quad ;\quad \{\dot{u}\}=\{\dot{u}(0)\}$$

$$\text{\underline{L}}\quad t=0\ ,\quad \{u\}=\begin{Bmatrix}u_1(0)\\u_2(0)\\u_3(0)\end{Bmatrix}\quad ;\quad \{\dot{u}\}=\begin{Bmatrix}\dot{u}_1(0)\\\dot{u}_2(0)\\\dot{u}_3(0)\end{Bmatrix} \qquad (10.1.2)$$

رابطه های فوق برای یک سیستم سه درجه آزادی گسترش داده شده اند و $u_j(0)\,,\,\dot{u}_j(0)$ به ترتیب مقادیر سرعت وجابجایی اولیه (درلحظه $t=0$) را برای درجه آزادی j ام نشان می دهند.

معرفی فرکانس ها و پریودهای طبیعی سیستم وبردارهای شکل مود

$$T_n=\frac{2\pi}{\omega_n}=\frac{1}{f_n} \qquad (10.1.3)$$

$\{\phi_n\}$: بردار شکل مود ارتعاشی برای n امین مود

$$\{\phi_n\}=\{\phi_{1n},\phi_{2n},\phi_{3n}\}^T$$

برای تعیین فرکانس های طبیعی ومودهای ارتعاشی بردار جابجایی رابه صورت حاصلضرب مختص زمان در بردارشکل مود n ام تعریف می کنیم :

$$\{u(t)\}=q_n(t)\{\phi_n\} \qquad (10.2.1)$$

که دراین رابطه $q_n(t)$ مختص زمان یا فاکتورزمان برای n امین مودارتعاشی است. دبه صورت یک تابع هارمونیک ساده تعریف می شود.

$$\{u(t)\}=\begin{Bmatrix}u_1(t)\\u_2(t)\\u_3(t)\end{Bmatrix}\quad ;\quad \{\phi_n\}=\begin{Bmatrix}\phi_{1n}\\\phi_{2n}\\\phi_{3n}\end{Bmatrix}$$

$$q_n(t)=A_n\cos\omega_n t+B_n\sin\omega_n t \qquad (10.2.2)$$

$$\rightarrow\ \{u(t)\}=\{\phi_n\}\ A_n\cos\omega_n t+B_n\sin\omega_n t \qquad (10.2.3)$$

$$\{\ddot{u}(t)\}=\{\phi_n\}(-\omega_n^2)\ A_n\cos\omega_n t+B_n\sin\omega_n(t)$$

اکنون با قرار دادن در رابطه (10.1.1) داریم،

$$[m]\{\ddot{u}\}+[k]\{u\}=\{0\}$$

$$[m](-\omega_n^2)\{\phi_n\}\,q_n(t)+[k]\{\phi_n\}\,q_n(t)=\{0\}$$

$$\left(-\omega_n^2[m]+[k]\right)\{\phi_n\}\,q_n(t)=\{0\}$$

در حالتی که $q_n(t)=0$ فرض شود تساوی در معادله بالا برقرار می‌شود که البته در این حالت حرکتی در سیستم ایجاد نخواهد شد. در غیر این صورت باید تساوی زیر برقرار باشد:

$$[k]\{\phi_n\}=\omega_n^2[m]\{\phi_n\} \qquad (10.2.4)$$

که حالت مناسب برای حل مسئله است و در اصطلاح به آن مسئله مقدار ویژه گفته می‌شود:

$$\left[[k]-\omega_n^2[m]\right]\{\phi_n\}=\{0\} \qquad (10.2.5)$$

دقت کنید که $\{\phi_n\}=\begin{Bmatrix}\phi_{1n}\\ \phi_{2n}\\ \phi_{3n}\end{Bmatrix}$ برای یک سیستم سه درجه آزادی است. پس ϕ_{jn} مقدار بردار شکل مود n ام روی j امین درجه آزادی را نشان می‌دهد.

بدیهی است که $\{\phi_n\}=\{0\}$ یک جواب برای معادله (10.2.5) است که مفید نیست (چون باز هم حرکتی ایجاد نمی‌شود). برای یافتن جواب مطلوب دترمینان ماتریس موجود را صفر می‌کنیم تا معکوس‌پذیر نباشد.

$$\det\left([k]-\omega_n^2[m]\right)=0$$

$$\text{یا}\quad \left|[k]-\omega_n^2[m]\right|=0 \qquad (10.2.6)$$

نتیجه حل معادله (10.2.6) بدست آمدن n فرکانس طبیعی برای سیستم N درجه آزادی است که از کوچک به بزرگ مرتب می‌شوند و به آنها مقادیر ویژه می‌گویند. $(\omega_1<\omega_2<\dots<\omega_N)$

و ω_n، n امین فرکانس طبیعی سازه است.

به همین ترتیب N بردار شکل مود متناظر حاصل می‌گردد که: $\{\phi_n\}=\{\phi_{1n},\phi_{2n},\dots,\phi_{Nn}\}$

به بردارهای فوق در اصطلاح بردار ویژه گفته می‌گردد.

ماتریس های مودال و طیفی. N بردار ویژه و N مقدار ویژه به دست آمده را می توان در ماتریس های جمع آوری کرد و در کنار هم چید. فرض کنید $\{\phi_n\}$ nامین شکل مود طبیعی متناظر با nامین فرکانس طبیعی یعنی ω_n باشد. jامین درایه این بردار $\{\phi_n\}$ در اصطلاح ϕ_{jn} نامیده می شود. در این صورت j متناسب با درجه آزادی jامین است. کنون $\{\phi_1\}$، $\{\phi_2\}$، ... $\{\phi_n\}$ را کنار هم می چینیم. و ماتریس مودال $[\Phi]$ را تشکیل می دهیم:

$$[\Phi] = [\{\phi_1\}\{\phi_2\}\cdots\{\phi_N\}] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & & \phi_{NN} \end{bmatrix}$$

$[\Phi]$ در اصطلاح ماتریس مودال برای مسائل مقادیر ویژه نامیده می گردد.

به همین ترتیب مقادیر ویژه ω_n^2 روی یک ماتریس قطری با نام $[\Omega^2]$ چیدمان می شوند که به آن ماتریس طیفی گفته می گردد.

$$[\Omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \tilde{0} \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ \tilde{0} & & & \omega_N^2 \end{bmatrix}$$

دقت کنید که هرکدام از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه در روابط (10.2.4) صادق هستند یعنی:

$$[k]\{\phi_n\} = [m]\{\phi_n\}\omega_n^2 \qquad (10.3.1)$$

که تمامی معادلات به ازای $n=1,2,\ldots N$ صادق است. بنابراین:

$$[k][\Phi] = [m][\Phi][\Omega^2] \qquad (10.3.2)$$

تعامد مودهای ارتعاشی. نشان داده می‌شود که مودهای ارتعاشی با فرکانس‌های طبیعی متفاوت شرایط تعامد زیر را با فرض $\omega_n \neq \omega_r$ برقرار می‌کنند.

$$\{\phi_n\}^T [k] \{\phi_r\} = 0 \quad ; \quad \{\phi_n\}^T [m] \{\phi_r\} = 0 \qquad (10.4.1)$$

برای اثبات رابطه مهم بالا رابطه (10.2.4) را مجدداً یادآوری می‌کنیم:

$$[k]\{\phi_n\} = \omega_n^2 [m]\{\phi_n\} \qquad (10.2.4)$$

اکنون رابطه (10.2.4) در $\{\phi_r\}^T$ پیش‌ضرب می‌شود.

$$\{\phi_r\}^T [k] \{\phi_n\} = \omega_n^2 \{\phi_r\}^T [m] \{\phi_n\} \qquad (10.4.2)$$

به همین ترتیب رابطه 10.2.4 می‌تواند برحسب r امین مود ارتعاشی نوشته شود. یعنی $[k]\{\phi_r\} = \omega_r^2 [m]\{\phi_r\}$
اکنون با پیش‌ضرب در $\{\phi_n\}^T$ داریم،

$$\{\phi_n\}^T [k] \{\phi_r\} = \omega_r^2 \{\phi_n\}^T [m] \{\phi_r\} \qquad (10.4.3)$$

اکنون در رابطه (10.4.2) طرفین معادله را ترانهاده یا Transpose می‌کنیم و داریم

$$\left(\{\phi_r\}^T [k] \{\phi_n\}\right)^T = \left(\omega_n^2 \{\phi_r\}^T [m] \{\phi_n\}\right)^T$$

و درنتیجه:

$$\{\phi_n\}^T [k]^T \{\phi_r\} = \omega_n^2 \{\phi_n\}^T [m]^T \{\phi_r\}$$

ماتریس‌های سختی و جرم متقارن هستند یعنی $[k]^T = [k]$ و $[m]^T = [m]$. درنتیجه

$$\{\phi_n\}^T [k] \{\phi_r\} = \omega_n^2 \{\phi_n\}^T [m] \{\phi_r\} \qquad (10.4.4)$$

اکنون با کم کردن رابطه (10.4.3) از رابطه (10.4.4) داریم:

$$(\omega_n^2 - \omega_r^2) \{\phi_n\}^T [m] \{\phi_r\} = 0$$

و با توجه به اینکه $\omega_n \neq \omega_r$ است و درنتیجه $\omega_n^2 \neq \omega_r^2$ می‌توان دریافت که $\{\phi_n\}^T [m] \{\phi_r\} = 0$

نتیجه تعامد مودهای ارتعاشی. با توجه به تعامد مودهای ارتعاشی می‌توان ماتریس های مربعی و قطری به صورت زیر تشکیل داد:

$$[K] = [\Phi]^T[k][\Phi] \quad , \quad [M] = [\Phi]^T[m][\Phi] \qquad (10.4.5)$$

که در آنها عناصر روی قطر اصلی از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$K_n = \{\phi_n\}^T[k]\{\phi_n\} \quad ; \quad M_n = \{\phi_n\}^T[m]\{\phi_n\} \qquad (10.4.6)$$

و سایر عناصر واقع در غیر از قطر اصلی صفر هستند.

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 & & 0 \\ & K_2 \ddots & \\ 0 & & K_N \end{bmatrix} \quad ; \quad [M] = \begin{bmatrix} M_1 & & \\ & M_2 \ddots & \\ & & M_n \end{bmatrix}$$

و در نتیجه:

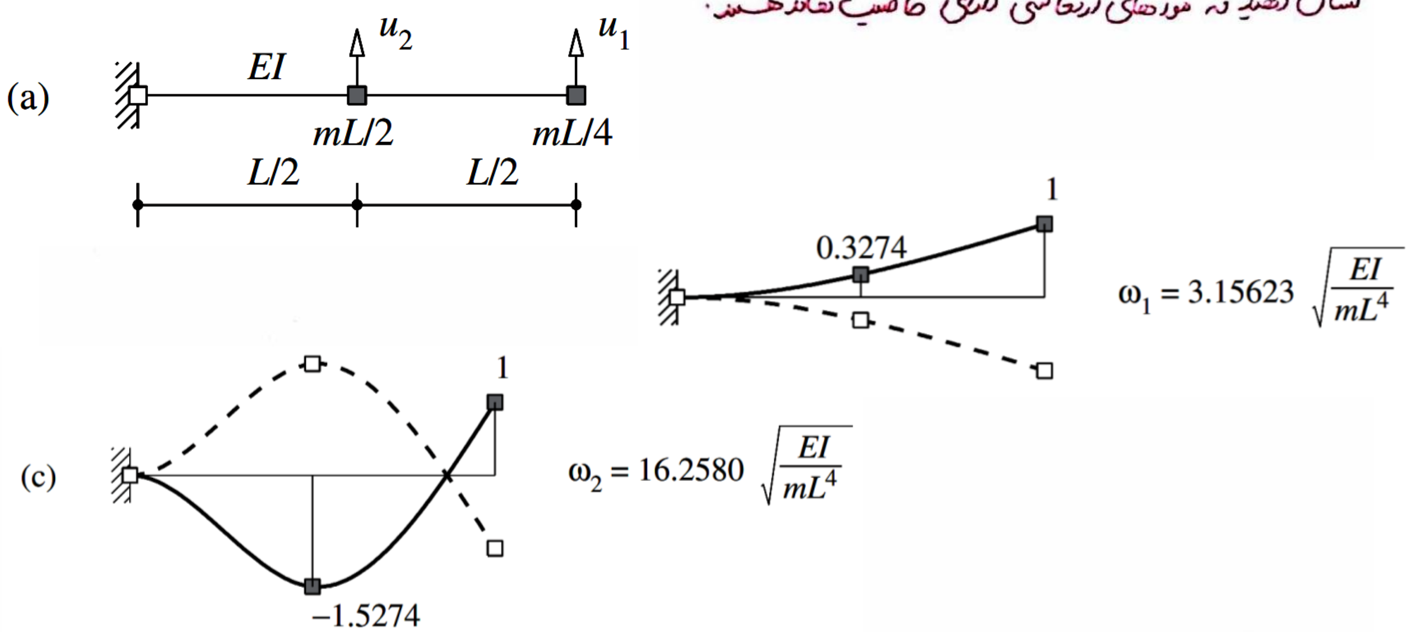
$$K_n = \omega_n^2 M_n \qquad (10.4.7)$$

برای اثبات رابطه (10.4.7) توجه کنید که:

$$K_n = \{\phi_n\}^T\underbrace{[k]\{\phi_n\}}_{\omega_n^2[m]\{\phi_n\}} \rightarrow K_n = \{\phi_n\}^T\omega_n^2[m]\{\phi_n\}$$

$$\Rightarrow K_n = \omega_n^2\{\phi_n\}^T[m]\{\phi_n\} \rightarrow K_n = \omega_n^2 M_n$$

مثال: فرکانس های طبیعی و مدهای شکل ارتعاش برای سیستم نشان داده شده در شکل Fig. 10.2a را بدست آورید.
نشان دهید که مودهای ارتعاشی دارای خاصیت تعامد هستند.



حل مسئله - ماتریس های جرم و سفتی در مثال (۹-۵) فصل قبل با توجه به درجات آزادی u_1 و u_2 تعیین می‌شوند:

$$[m] = \begin{bmatrix} mL/4 & 0 \\ 0 & mL/2 \end{bmatrix} \quad ; \quad [k] = \frac{48EI}{7L^3}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 16 \end{bmatrix}$$

$$([k] - \omega[m]) = \frac{48EI}{7L^3}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 16 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} mL/4 & 0 \\ 0 & mL/2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{48EI}{7L^3}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 16 \end{bmatrix} - \omega^2\left(\frac{mL}{4}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{48EI}{7L^3}\left(\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 16 \end{bmatrix} - \underbrace{\frac{7\omega^2 mL^4}{192EI}}_{\lambda}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{48EI}{7L^3}\left(\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 16 \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \frac{48EI}{7L^3}\begin{bmatrix} 2-\lambda & -5 \\ -5 & 16-2\lambda \end{bmatrix} \quad (a)$$

بنابراین عبارت (b) $\lambda = \frac{7mL^4}{192EI}\omega^2$ فرض شده است.

$$|[k] - \omega^2[m]| = 0$$

$$\rightarrow \left|\begin{bmatrix} 2-\lambda & -5 \\ -5 & 16-2\lambda \end{bmatrix}\right| = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(16-2\lambda) - (-5)(-5) = 0$$

$$\rightarrow 2\lambda^2 - 20\lambda + 7 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 0.36319 \; ; \; \lambda_2 = 9.6368$$

$$\lambda = \frac{7mL^4}{192EI}\omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{192EI}{7mL^4}\lambda}$$

$$\lambda_1 = 0.36319 \longrightarrow \omega_1 = 3.15623\sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \qquad (c)$$

$$\lambda_2 = 9.6368 \longrightarrow \omega_2 = 16.2580\sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

برای بدست آوردن شکل مودهای ارتعاشی داریم:

$$([k] - \omega^2[m])\{\phi_n\} = \{0\}$$

$$\rightarrow \frac{48EI}{7L^3}\begin{bmatrix} 2-\lambda_n & -5 \\ -5 & 16-2\lambda_n \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varphi_{1n} \\ \varphi_{2n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$(2-\lambda_n)\phi_{1n} - 5\phi_{2n} = 0$$

$$-5\phi_{1n} + (16-2\lambda_n)\phi_{2n} = 0$$

دو معادله مستقل از یکدیگر نیستند
پس $\phi_{1n}=1$ فرض می‌شود و ϕ_{2n}
بدست آورده می‌شود.

$$(2-\lambda_n)\phi_{1n} = 5\phi_{2n}$$

$$\Rightarrow \phi_{2n} = \frac{2-\lambda_n}{5}\cancel{\phi_{1n}}^{\,1} \rightarrow \phi_{2n} = \frac{2-\lambda_n}{5}$$

$$\lambda_n = \lambda_1 = 0.36319 \; ; \; \phi_{1n} = 1 \rightarrow \phi_{21} = \frac{2-0.36319}{5} = 0.3274$$

$$\lambda_n = \lambda_2 = 9.6368 \; ; \; \phi_{12} = 1 \rightarrow \phi_{22} = \frac{2-9.6368}{5} = -1.5274$$

$$\rightarrow \{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.3274 \end{Bmatrix} \; ; \; \{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.5274 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi_1^T\}[m]\{\phi_2\} = \langle 1 \;\; 0.3274 \rangle \frac{mL}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1.5274 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\{\phi_1\}^T[k]\{\phi_2\} = \langle 1 \;\; 0.3274 \rangle \frac{48EI}{7L^3}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 16 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1.5274 \end{Bmatrix} = 0$$

مثال. در مسئله قبل ماتریس های مودال و طیفی را تشکیل دهید.

$$\omega_1^2 = 9.9618 \frac{EI}{mL^4} \quad ; \quad \omega_2^2 = 264.3226 \frac{EI}{mL^4}$$

$$[\Omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \Rightarrow [\Omega^2] = \frac{EI}{mL^4} \begin{bmatrix} 9.9618 & 0 \\ 0 & 264.3226 \end{bmatrix}$$

$$[\Phi] = \left[\{\phi_1\} \{\phi_2\} \right] \rightarrow [\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.3274 & -1.5274 \end{bmatrix}$$

مثال. در مسئله قبل ماتریس های جرم و سختی در فضای مودال را بدست آورید.

$$[M] = [\Phi]^T [m] [\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.3274 & -1.5274 \end{bmatrix}^T \frac{mL}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.3274 & -1.5274 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \frac{mL}{4} \begin{bmatrix} 1.2144 & 0 \\ 0 & 5.6660 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow M_1 = \left(\frac{mL}{4}\right) \times 1.2144 \quad ; \quad M_2 = \left(\frac{mL}{4}\right) \times 5.6660$$

$$[K] = [\Phi]^T [k] [\phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.3274 & -1.5274 \end{bmatrix}^T \frac{48EI}{7L^3} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.3274 & -1.5274 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [K] = \frac{48EI}{7L^3} \begin{bmatrix} 0.4411 & 0 \\ 0 & 54.8012 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow K_1 = \frac{48EI}{7L^3}(0.4411) \quad ; \quad K_2 = \frac{48EI}{7L^3}(54.8012)$$

برای کنترل کردن جواب ها فرکانس های طبیعی را چک می‌کنیم

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K_1}{M_1}} = 3.1564 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad \checkmark$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K_2}{M_2}} = 16.2579 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad \checkmark$$

پاسخ معادلات ارتعاش آزاد- سیستم‌های بدون میرایی

پیش از این طبق رابطه (10.2.3) داشتیم که:

$$\{u(t)\} = \{\phi_n\}(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t) \quad (10.2.3)$$

که در آن پاسخ در مودهای جداگانه محاسبه می‌گردید. اکنون با کنار هم قرار دادن پاسخ در N مود (جمع مودی) داریم:

$$\{u(t)\} = \sum_{n=1}^{N} \phi_n (A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t) \qquad (10.8.1)$$

که در آن A_nها و B_nها ضرایب ثابت هستند. برای پیدا کردن ثابت‌ها لازم است که بردار سرعت را نیز تشکیل دهیم. یعنی:

$$\{\dot u(t)\} = \sum_{n=1}^{N} \phi_n \omega_n (-A_n \sin\omega_n t + B_n \cos\omega_n t) \qquad (10.8.2)$$

در لحظه $t=0$ برای شرایط اولیه نتیجه می‌شود که:

$$\{u(0)\} = \sum_{n=1}^{N} \phi_n A_n$$
$$\{\dot u(0)\} = \sum_{n=1}^{N} \phi_n B_n \omega_n \qquad (10.8.3)$$

اکنون از فصل دوم (ارتعاش آزاد سیستم تک درجه آزادی) یادآوری می‌کنیم که:

$$m\ddot u + ku = 0 \quad \Rightarrow \quad u(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t$$

$$A = u(0) \;;\quad B = \frac{\dot u(0)}{\omega_n} \;;\quad u(t) = u(0)\cos\omega_n t + \frac{\dot u(0)}{\omega_n}\sin\omega_n t$$

به طور مشابه در اینجا نیز داریم:

$$A_n = q_n(0) \qquad B_n = \frac{\dot q_n(0)}{\omega_n}$$

$$q_n(t) = A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t$$

یا $q_n(t) = q_n(0)\cos\omega_n t + \dfrac{\dot q_n(0)}{\omega_n}\sin\omega_n t$

و در نتیجه

$$\{u(t)\} = \sum_{n=1}^{N}\{\phi_n\}\Big[\underbrace{q_n(0)\cos\omega_n t + \frac{\dot q_n(0)}{\omega_n}\sin\omega_n t}_{q_n(t)}\Big] \qquad (10.8.6)$$

یا $\{u(t)\} = \sum_{n=1}^{N}\{\phi_n\}\, q_n(t)$

بنابراین لازم است شرایط اولیه در فضای مودال برای همه مودها $(n=1,2,\dots,N)$ تعریف شود.

این شرایط اولیه $q_n(0)$ و $\dot{q}_n(0)$ برای nامین مود ارتعاشی چنین هستند:

$$q_n(0)=\frac{\{\phi_n\}^T[m]\{u(0)\}}{\{\phi_n\}^T[m]\{\phi_n\}}=\frac{\{\phi_n\}^T[m]\{u(0)\}}{M_n}$$

$$\dot{q}_n(0)=\frac{\{\phi_n\}^T[m]\{\dot{u}(0)\}}{\{\phi_n\}^T[m]\{\phi_n\}}=\frac{\{\phi_n\}^T[m]\{\dot{u}(0)\}}{M_n}$$

که در آن بردار جابجایی $\{u(0)\}$ و سرعت اولیه $\{\dot{u}(0)\}$ به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\{u(0)\}=\begin{Bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ \vdots \\ u_N(0) \end{Bmatrix} \quad ; \quad \{\dot{u}(0)\}=\begin{Bmatrix} \dot{u}_1(0) \\ \dot{u}_2(0) \\ \vdots \\ \dot{u}_N(0) \end{Bmatrix}$$

$j=1,2,\dots,N$ شمارنده درجات آزادی است. یعنی $u_j(0)$ و $\dot{u}_j(0)$ به ترتیب جابجایی اولیه و سرعت اولیه متناظر با j امین درجه آزادی هستند.